

### 第3节 空间点、线、面的位置关系综合小题 (★★☆)

#### 强化训练

1. (2023·河北模拟·★★)(多选) 已知直线  $a, b$  和平面  $\alpha, \beta, \gamma$ , 下列选项能得到  $\alpha \perp \beta$  的是 ( )

- (A)  $a \parallel \alpha, a \parallel \beta$     (B)  $\gamma \parallel \beta, \alpha \perp \gamma$     (C)  $\alpha \cap \beta = a, b \perp a, b \subset \beta$     (D)  $a \perp \beta, a \parallel \alpha$

答案: BD

解析: A 项, 如图 1, 二面角  $\alpha-l-\beta$  的大小可以改变, 只要  $a$  不在两个平面内, 且与交线  $l$  平行, 就能满足 A 项, 所以不一定能得到  $\alpha \perp \beta$ , 故 A 项错误;

B 项, 如图 2, 能得到  $\alpha \perp \beta$ , 故 B 项正确;

C 项, 如图 3, 改变二面角  $\alpha-a-\beta$  的大小, 仍能满足所有条件, 不一定有  $\alpha \perp \beta$ , 故 C 项错误;

D 项,  $a \parallel \alpha \Rightarrow$  在  $\alpha$  内存在  $a'$ , 使  $a \parallel a'$ , 因为  $a \perp \beta$ , 所以  $a' \perp \beta$ , 从而  $\alpha \perp \beta$ , 故 D 项正确.

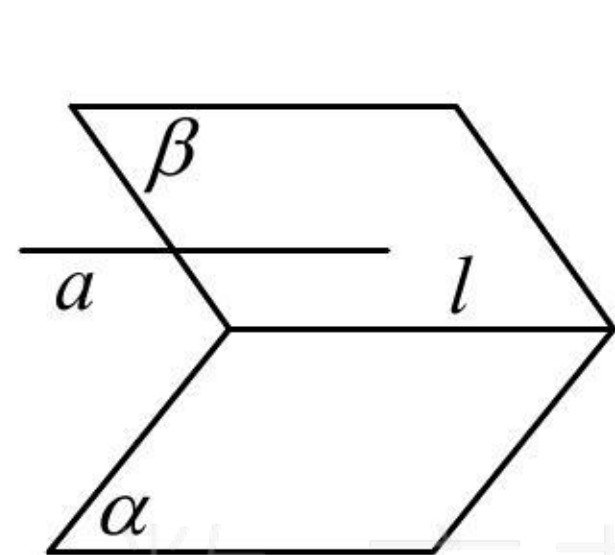


图1

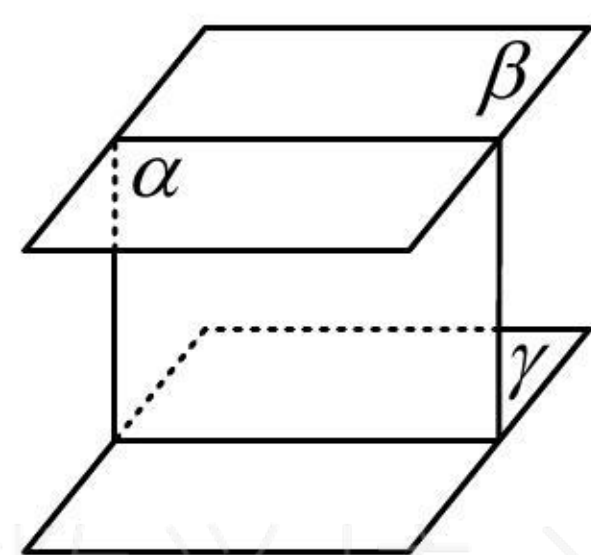


图2

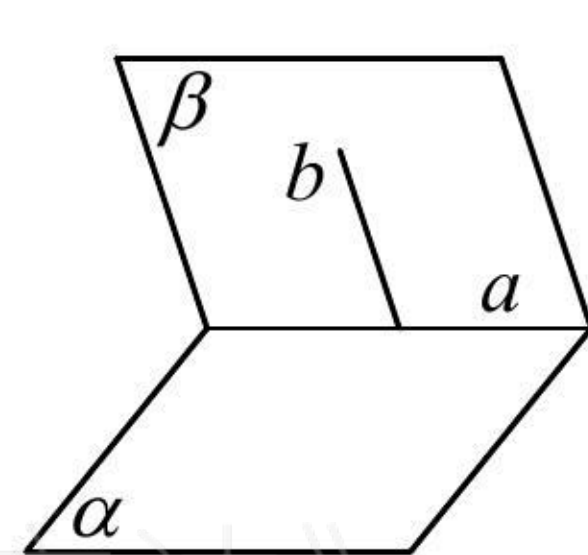


图3

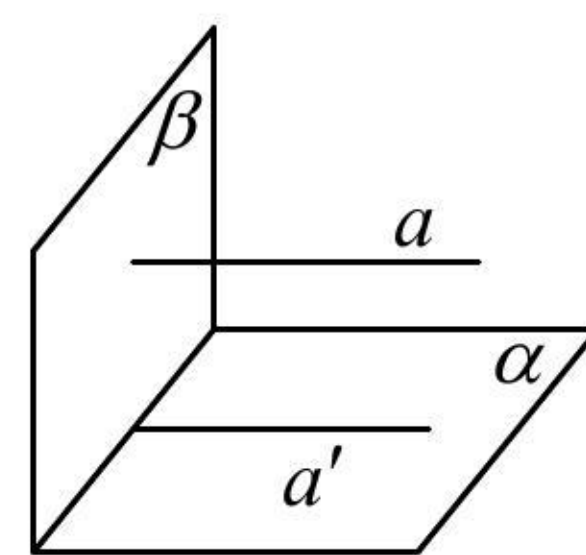


图4

2. (2023·全国模拟·★★★)(多选) 已知  $m, n$  为异面直线, 直线  $l$  与  $m, n$  都垂直, 则下列说法正确的是 ( )

- (A) 若  $l \perp$  平面  $\alpha$ , 则  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$   
 (B) 存在平面  $\alpha$ , 使  $l \perp \alpha, m \subset \alpha, n \parallel \alpha$   
 (C) 有且仅有一对互相平行的平面  $\alpha$  和  $\beta$ , 其中  $m \subset \alpha, n \subset \beta$   
 (D) 有且仅有一对互相垂直的平面  $\alpha$  和  $\beta$ , 其中  $m \subset \alpha, n \subset \beta$

答案: BC

解析: 条件中有平行、垂直、异面, 直接想象不易, 而正方体中有这些位置关系, 故考虑用正方体来分析,

A 项, 如图 1 所示的情形满足  $l \perp \alpha, l$  与  $m, n$  都垂直, 但  $m \subset \alpha$ , 故 A 项错误;

B 项, 图 1 所示的情形即为满足 B 选项的一种情况, 故 B 项正确;

C 项, 如图 2, 图中画出了一对互相平行的平面  $\alpha, \beta$ , 且  $m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 除此之外, 没有其它满足要求的平行平面了, 这是因为由  $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha$  可得  $m \parallel \beta$ , 所以在  $\beta$  内必定存在直线  $m'$  与  $m$  平行, 由于  $m, n$  是异面直线, 所以  $m'$  与  $n$  相交, 两条相交直线可唯一确定一个平面  $\beta$ , 同理,  $\alpha$  也是唯一的, 故 C 项正确;

D 项, 如图 3 和图 4,  $m, n, \beta$  是一样的,  $\alpha$  不同, 都能满足  $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 故 D 项错误.



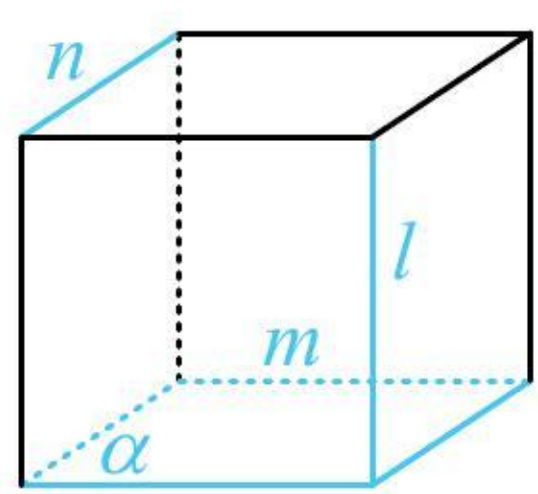


图1

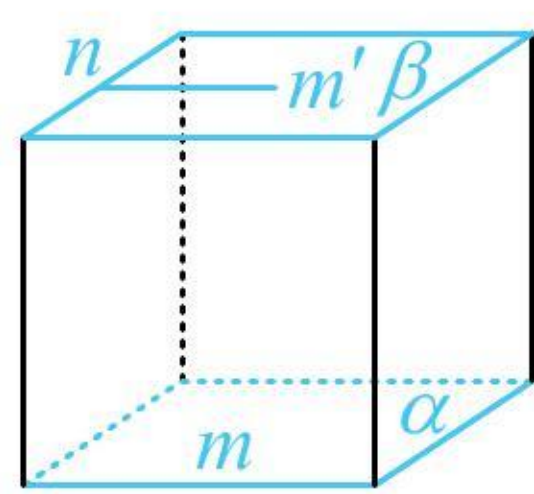


图2

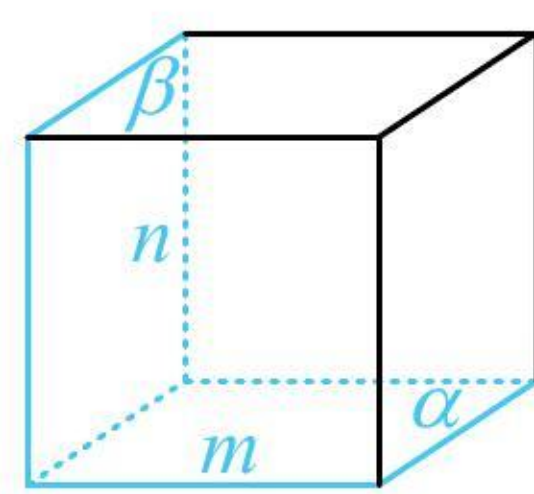


图3

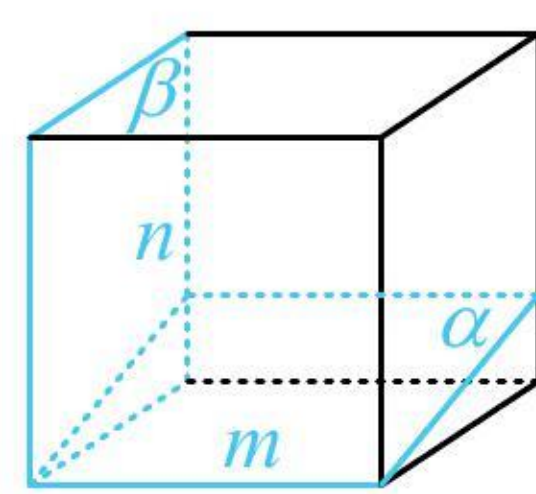


图4

3. (2023·四省联考·★★★★)(多选)已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$ ,  $B, D$ 是 $l$ 上两点, 直线 $AB \subset \alpha$ 且 $AB \cap l = B$ , 直线 $CD \subset \beta$ 且 $CD \cap l = D$ , 下列结论中, 错误的有( )

- (A) 若 $AB \perp l$ ,  $CD \perp l$ , 且 $AB = CD$ , 则 $ABCD$ 是平行四边形
- (B) 若 $M$ 是 $AB$ 中点,  $N$ 是 $CD$ 中点, 则 $MN \parallel AC$
- (C) 若 $\alpha \perp \beta$ ,  $AB \perp l$ ,  $AC \perp l$ , 则 $CD$ 在 $\alpha$ 上的射影是 $BD$
- (D) 直线 $AB, CD$ 所成角的大小与二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小相等

答案: ABD

解析: A项, 如图1,  $ABCD$ 是空间四边形, 不是平行四边形, 故A项错误;

B项, 如图2,  $MN$ 和 $AC$ 是异面直线, 故B项错误;

C项, 给出了两个线线垂直, 先用它们推线面垂直,

如图3,  $\begin{cases} AB \perp l \\ AC \perp l \end{cases} \Rightarrow l \perp \text{平面} ABC \Rightarrow l \perp BC$ ,

结合 $\alpha \perp \beta$ 可得 $BC \perp \alpha$ , 所以 $CD$ 在 $\alpha$ 上的射影是 $BD$ , 故C项正确;

D项, 由二面角的平面角的定义可得D项错误, 若不放心, 可考虑极端情况,

如图4, 在二面角 $\alpha - l - \beta$ 中, 假设 $AB, CD$ 都近似与 $l$ 重合, 则直线 $AB, CD$ 所成的角就接近0, 不等于二面角 $\alpha - l - \beta$  (图中的 $\angle EBF$ 是其平面角), 故D项错误.

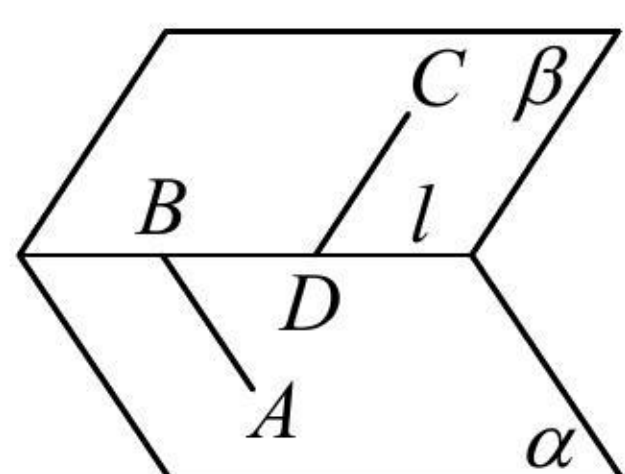


图1

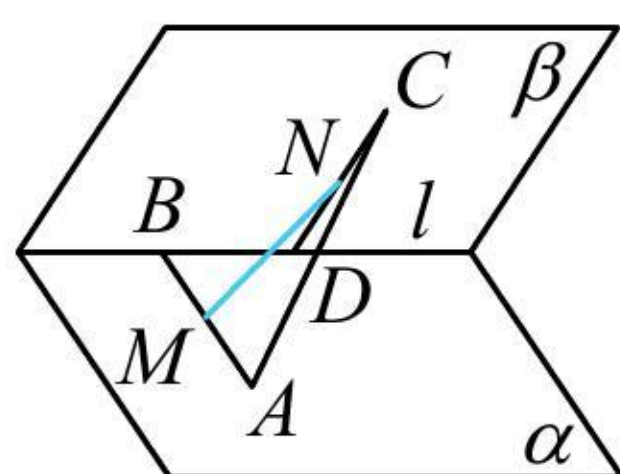


图2

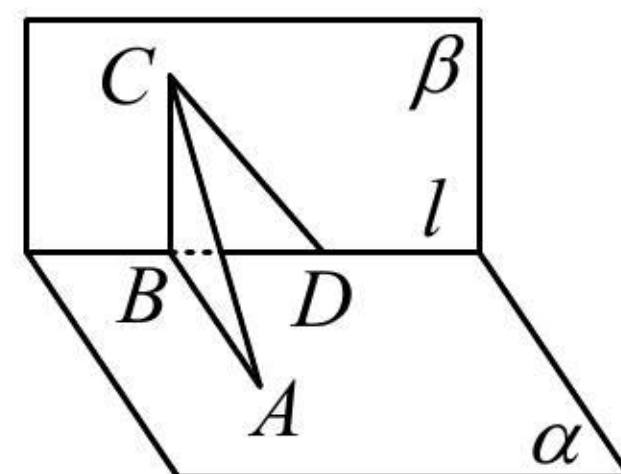


图3

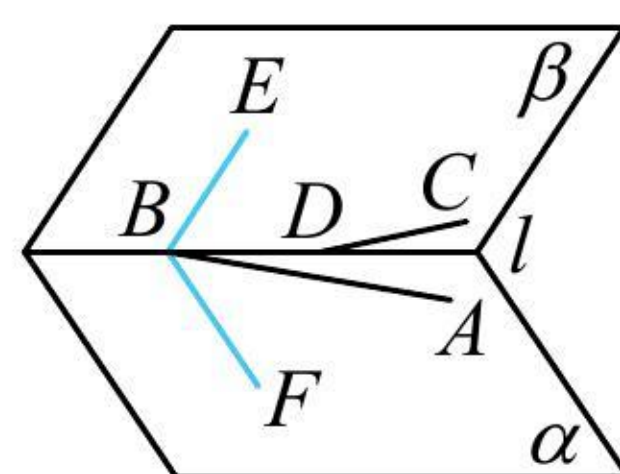


图4